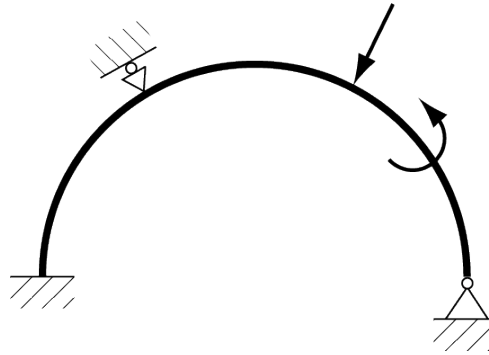


Mécanique des structures



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

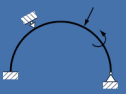
EPFL

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Chapitre 10 : Énergie de déformation élastique

Rappel

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Application



Le Bernina Express

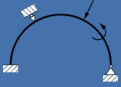


Système
hyperstatique

Théorème de
Menabrea

Résolution de
problème

...



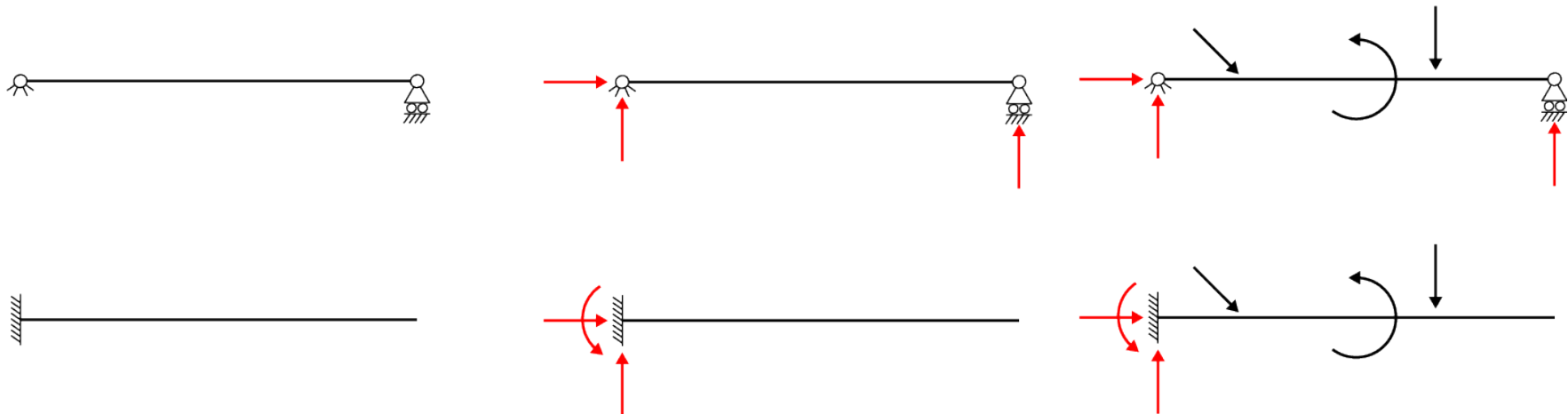
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

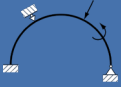
Généralités des systèmes hyperstatiques

Un corps est cinématiquement en équilibre si et seulement si le torseur résultant des forces extérieures qui agissent sur lui est nul (articulés)

- $\sum \mathbf{R}_e = \mathbf{0}$ somme forces extérieures nulle
- $\sum \mathbf{M}_e = \mathbf{0}$ somme des moments extérieurs nulle

Exemple de 2 systèmes avec 3 inconnues et trois équations d'équilibre





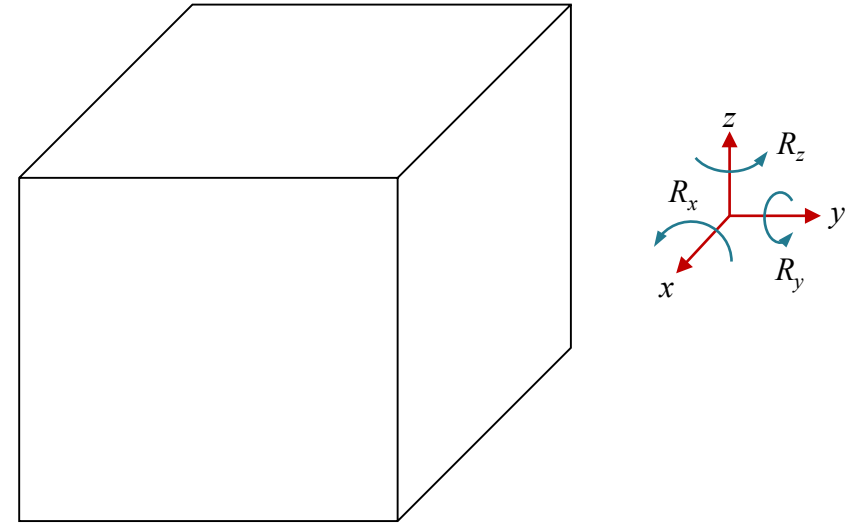
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

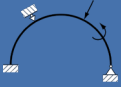
Exemple d'un corps rigidité : 6 ddl $\rightarrow$ 3 translations et 3 rotations

Ce corps peut-être :

- Libre ddl = 6
- Isostatique ddl = 0
- Hypostatique ddl ≥ 1
- Hyperstatique ddl < 0



Comment rendre un problème isostatique lors de la simulation numérique d'une dilatation thermique d'un corps?



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

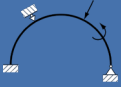
Quand les efforts intérieurs ne peuvent être déterminés en tout point par le simple jeu des équations d'équilibre, le système est dit *hyperstatique*.

Dans les systèmes, dits statiquement déterminés ou isostatiques, les réactions extérieures sont déterminées par les deux conditions d'équilibre suivantes :

- $\sum \mathbf{R}_e = \mathbf{0}$ somme forces extérieures nulle
- $\sum \mathbf{M}_e = 0$ somme des moments extérieurs nulle

Quand le nombre p des liaisons extérieures dépasse le nombre des conditions d'équilibre, le système est *hyperstatique extérieurement*, la différence k constitue l'ordre ou degré d'hyperstaticité extérieure

- $k = p - 6$ pour un système de l'espace
- $k = p - 3$ pour un système plan

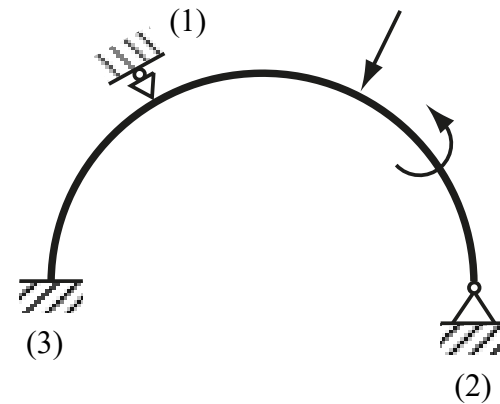
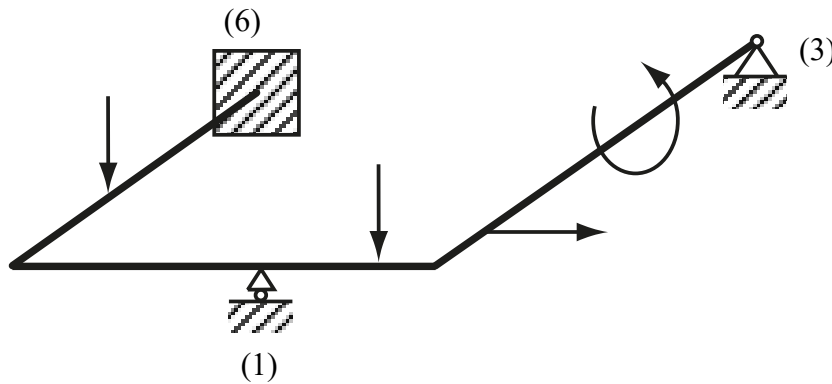


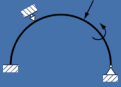
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatiques

Deux exemples de systèmes *hyperstatiques extérieurement*, leur ordre d'hyperstaticité respectif valant

- $k = 6 + 1 + 3 - 6 = 4$ pour la structure tridimensionnelle
- $k = 3 + 1 + 2 - 3 = 3$ pour le système bidimensionnel



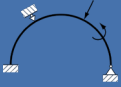


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Généralités des systèmes hyperstatique

Pour calculer un système hyperstatique extérieurement S , on procède de la manière suivante :

- a) on remplace les k liaisons surabondantes par autant de forces généralisées (forces ou moments) inconnues $R_1, R_2, \dots, R_k$ appelées réactions hyperstatiques et choisies arbitrairement parmi les p liaisons du système, de sorte que l'on obtient le système isostatique fondamental S' dérivé du système donné S
- b) on exprime ensuite les conditions d'équilibre du système S' (six dans l'espace, trois dans le plan) ainsi que les efforts intérieurs en fonction des forces extérieures et des hyperstatiques choisies
- c) on établit k conditions de déformation correspondant aux k liaisons supprimées et constituant les équations permettant de calculer les k hyperstatiques inconnues $R_1, R_2, \dots, R_k$
- d) avec les valeurs $R_1, R_2, \dots, R_k$, on obtient les autres réactions et les efforts intérieurs du système S

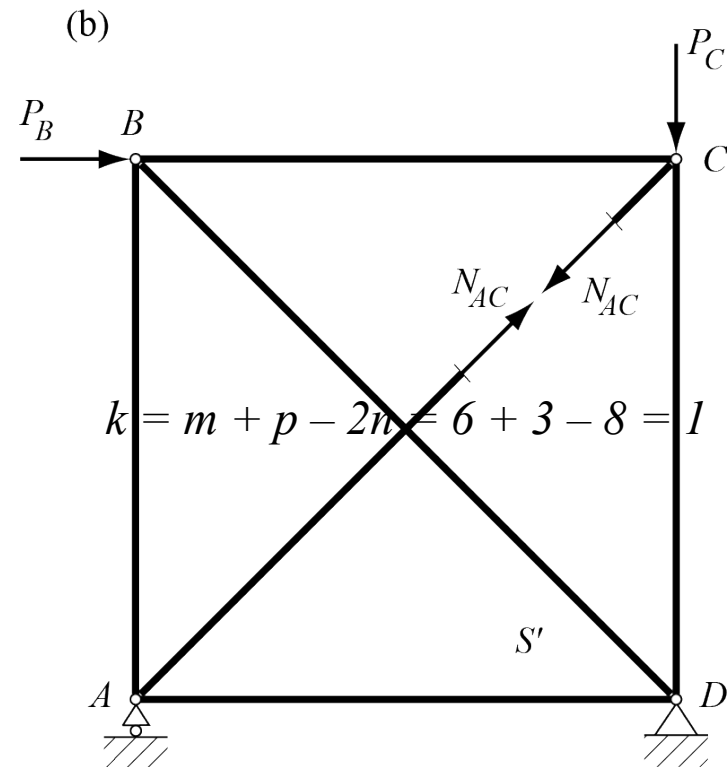
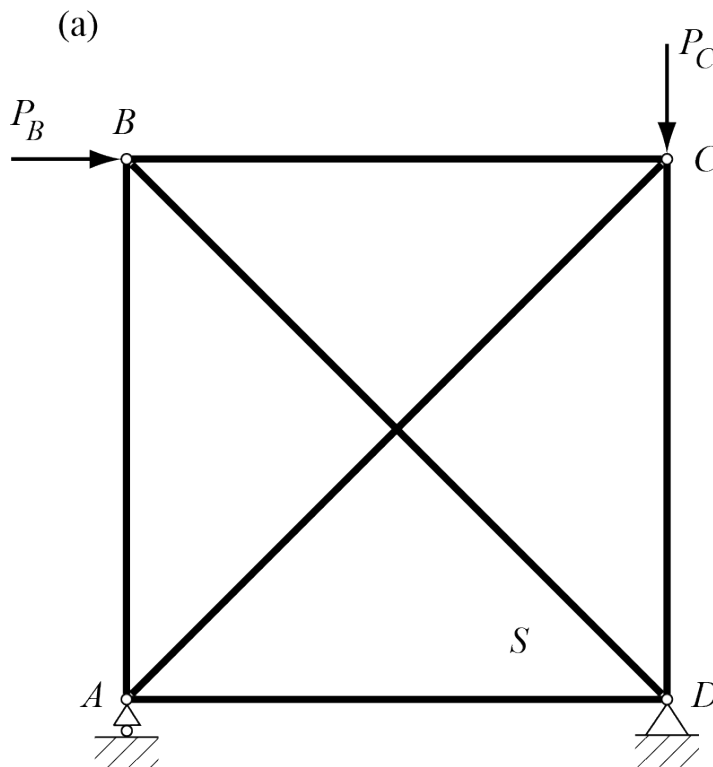


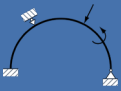
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Système plan de barres articulées en treillis

Un système est *hyperstatique intérieurement* quand la connaissance de toutes les réactions extérieures n'est pas suffisante pour calculer les efforts intérieurs.

Un telle structure est hyperstatique intérieurement d'ordre $k = m + p - 2n$, où m désigne le nombre de barres, p est le nombre de liaisons extérieures (si $p > 3$, le système est déjà hyperstatique extérieurement) et n dénote le nombre total de nœuds.



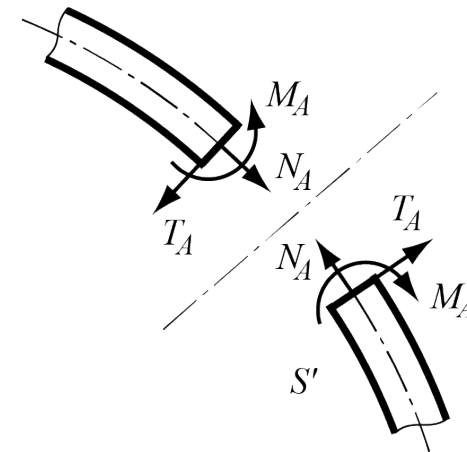
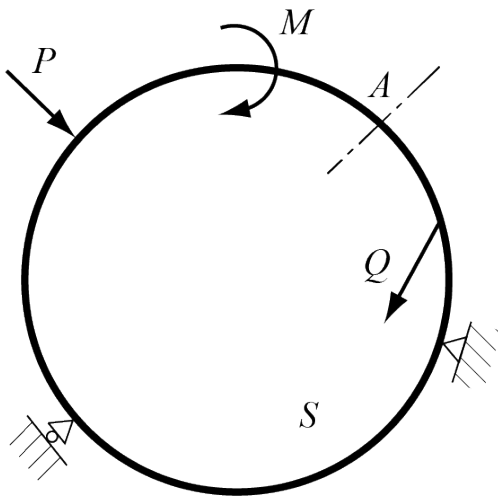


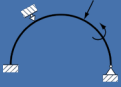
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Système fermé, non-articulé

Une structure en forme de cadre ou d'anneau est *hyperstatique intérieurement* d'ordre 3 dans le plan et d'ordre 6 dans l'espace.

Pour obtenir un système isostatique fondamental S' du système donné S , il suffit à nouveau de remplacer les k liaisons intérieures surabondantes par des forces hyperstatiques inconnues $R_1, R_2, \dots, R_k$ en coupant la boucle dans une section arbitraire et en considérant comme hyperstatiques les efforts intérieurs dans cette section

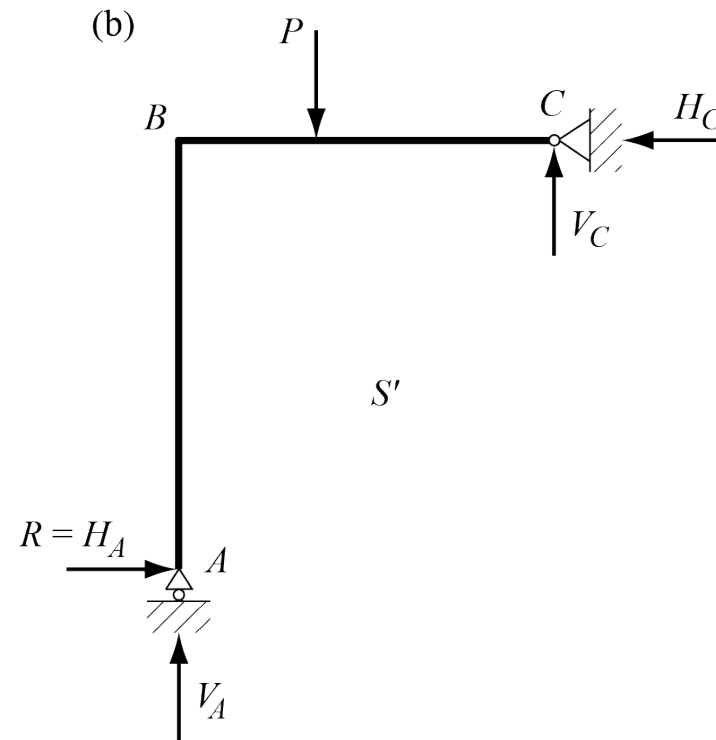
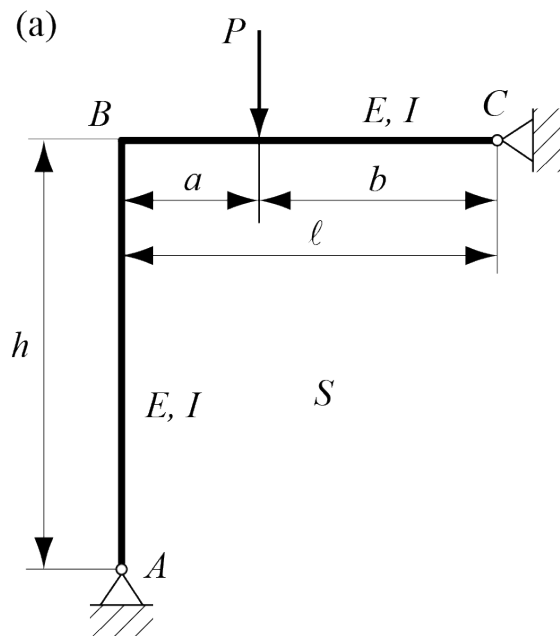




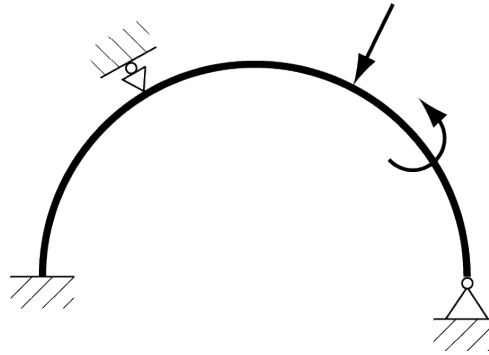
Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1

Calculer les réactions aux points A et C du système hyperstatique S



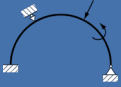
Mécanique des structures



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

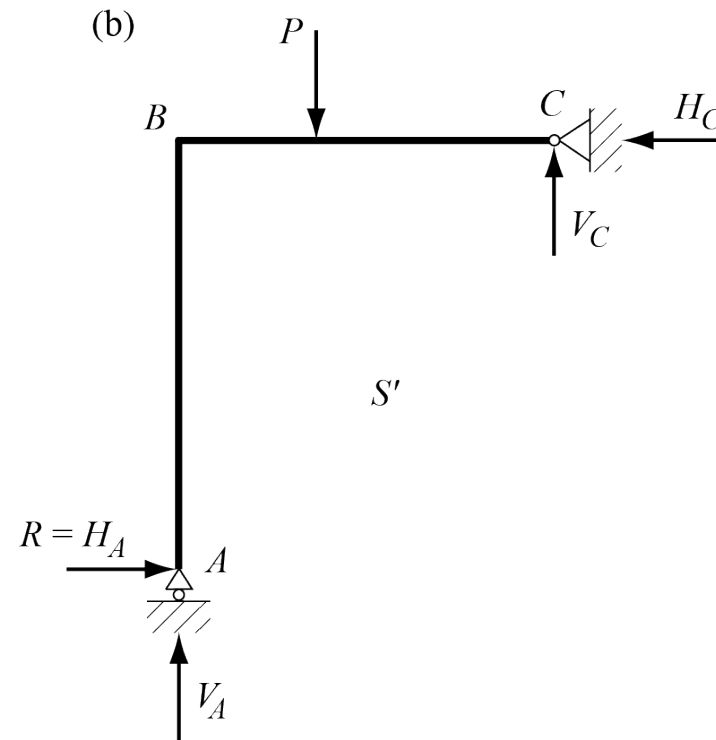
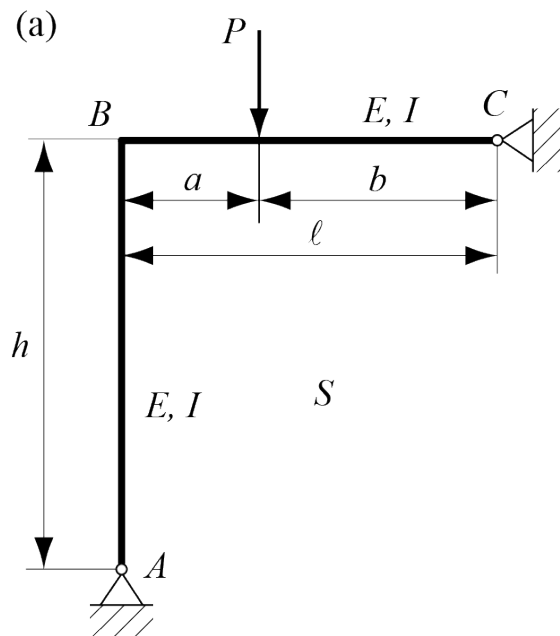
EPFL

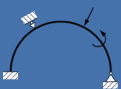


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1

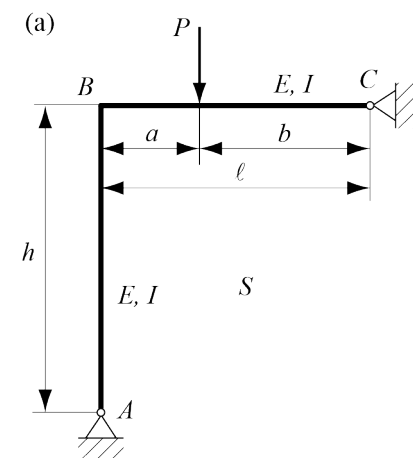
Calculer les réactions aux points A et C du système hyperstatique S

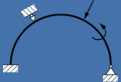




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

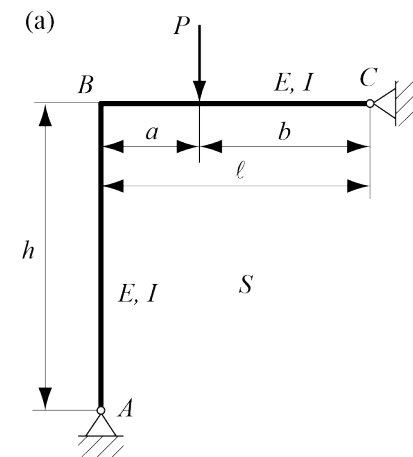
Problème 11.1

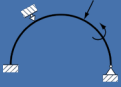




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

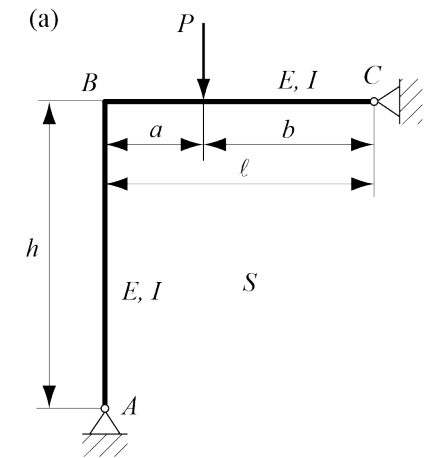
Problème 11.1

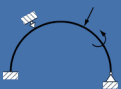




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

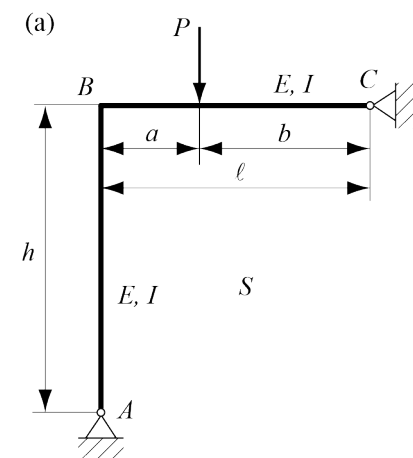
Problème 11.1



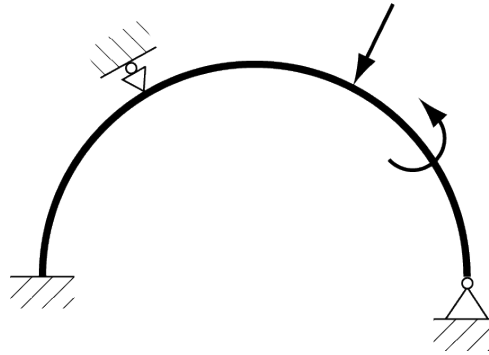


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.1



Mécanique des structures

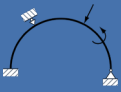


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL





Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Énoncé : Théorème de Menabrea

Énoncé du théorème : *Les hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes prennent les valeurs qui rendent minimum l'énergie de déformation du système.*

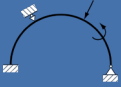
Les réactions hyperstatiques $R_1, R_2, \dots, R_k$ ne pouvant fournir aucun travail au système, il suffit d'annuler les dérivées partielles de l'énergie de déformation par rapport à ces réactions, ce qui conduit aux relations complémentaires cherchées

- $$\frac{\partial U}{\partial R_1} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial R_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial R_k} = 0$$

Le théorème n'est autre qu'une application du principe du travail minimum à la détermination des liaisons surabondantes.

On peut établir qu'il s'agit bien d'un minimum en montrant que la deuxième différentielle totale de la forme quadratique par rapport aux hyperstatiques $R_1, R_2, \dots, R_k$ est toujours positive

- $$\frac{\partial^2 U}{\partial R_1^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_2^2} > 0 \quad \dots \quad \frac{\partial^2 U}{\partial R_k^2} > 0$$



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

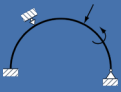
Démonstration : Théorème de Menabrea

Reprenons l'expression de l'énergie de déformation (seconde formule de Clapeyron) mais en séparant les forces généralisées $P_1, P_2, \dots, P_m$ appliquées au système et les hyperstatiques $R_1, R_2, \dots, R_k$

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} P_i P_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{i,m+j} P_i R_j \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{m+i,j} R_i P_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{m+i,m+j} R_i R_j$$

Si l'on extrait de cette expression les $2(m+k)-1$ termes dépendant de l'hyperstatique R_ℓ ($1 \leq \ell \leq k$), l'énergie de déformation peut être explicitée sous la forme suivante, où U' dénote la part de l'énergie de déformation qui est indépendante de R_ℓ

- $$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_{i,m+l} P_i R_l + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_{m+l,j} R_l P_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^k a_{m+i,m+j} R_i R_l \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k a_{m+l,m+j} R_l R_j + \frac{1}{2} a_{m+l,m+l} R_l^2 + U'$$



Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

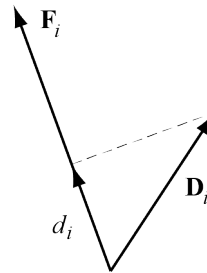
Démonstration : Théorème de Menabrea

En dérivant cette relation par rapport à l'hyperstatique R_ℓ , on trouve

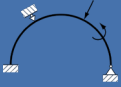
- $$\frac{\partial U}{\partial R_\ell} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_{i,m+l} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_{m+l,j} P_j + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^k a_{m+i,m+j} R_i \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^k a_{m+l,m+j} R_j + a_{m+l,m+l} R_\ell$$

Comme seul le dernier terme du membre droit de cette égalité contient l'hyperstatique de rang ℓ , la dérivée seconde de l'énergie de déformation par rapport à R_ℓ s'écrit simplement

- $$\frac{\partial^2 U}{\partial R_\ell^2} = a_{m+l,m+l} > 0$$



qui est bien strictement positive, puisque les coefficients d'influence directs sont nécessairement positifs, le facteur $a_{m+l,m+l}$ étant la projection sur l'axe de R_ℓ du déplacement du point d'application de R_ℓ provoqué par une force unité appliquée en ce même point dans la direction précisément de la force R_ℓ

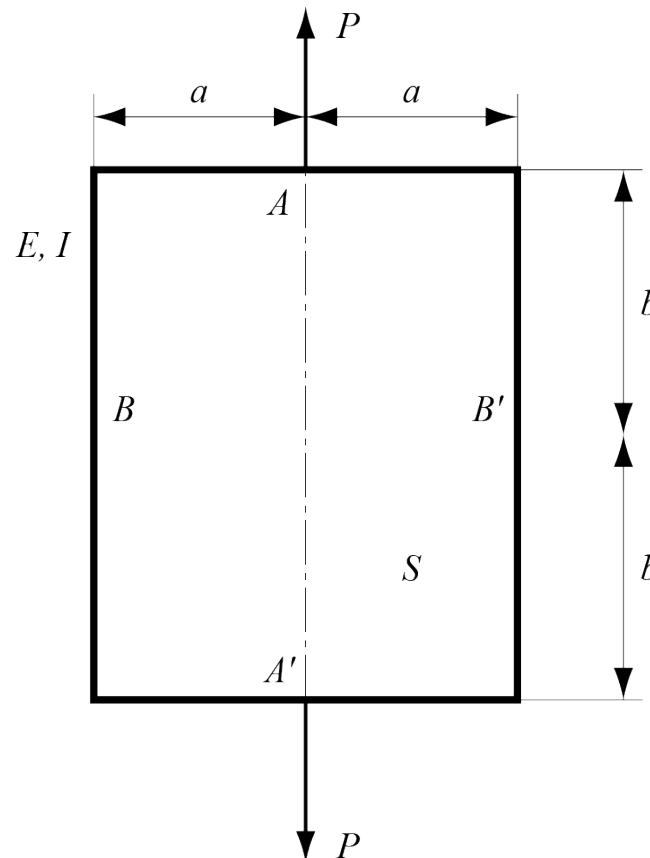


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

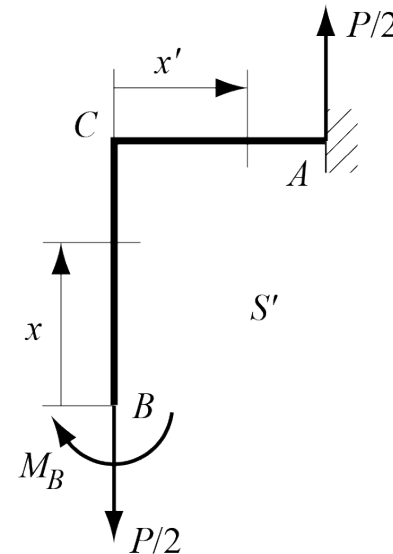
Problème 11.3

Par le théorème de Menabrea, trouver le moment hyperstatique intérieur au point B du cadre , puis calculer le déplacement relatif des points A et A' . On ne considérera que l'énergie de flexion.

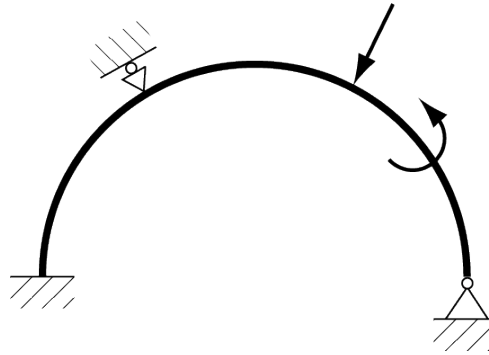
(a)



(b)



Mécanique des structures

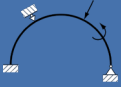


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Dr. Alain Preneloup
SGM BA3 2024-2025

EPFL



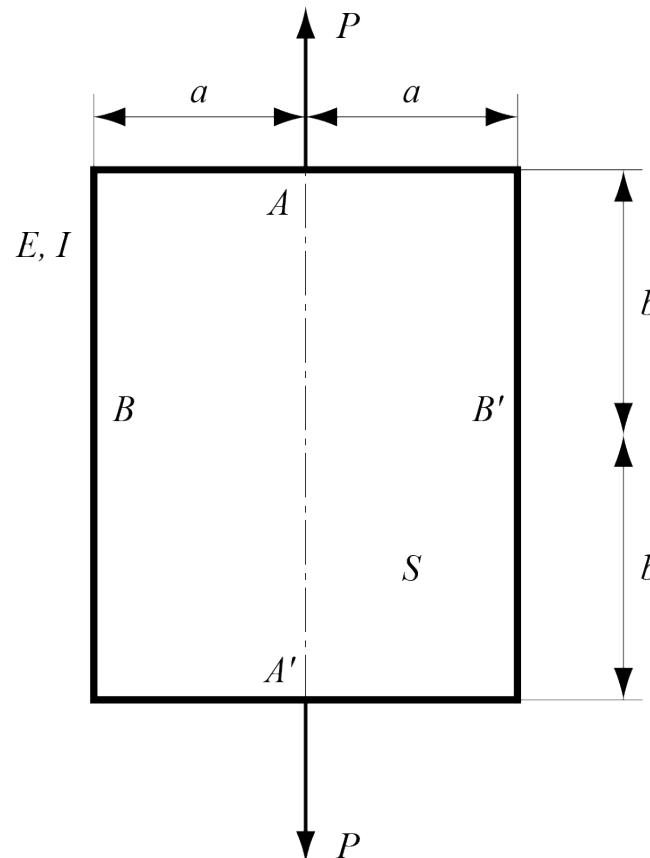


Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

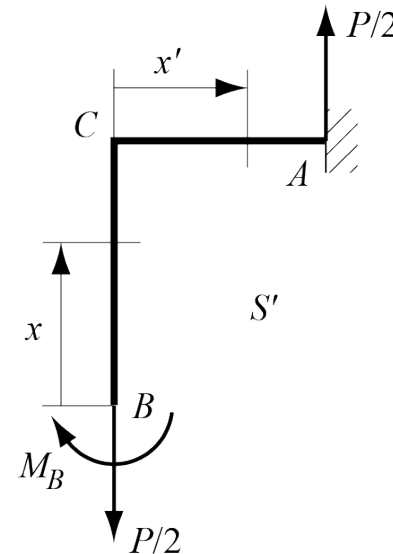
Problème 11.3

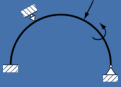
Par le théorème de Menabrea, trouver le moment hyperstatique intérieur au point B du cadre, puis calculer le déplacement relatif des points A et A' . On ne considérera que l'énergie de flexion.

(a)



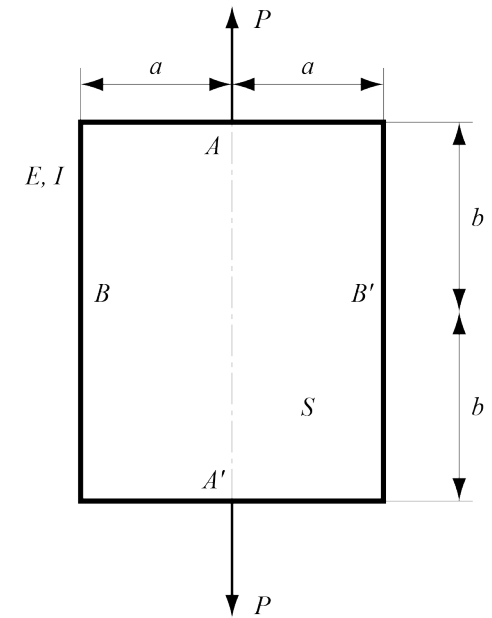
(b)

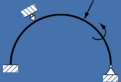




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

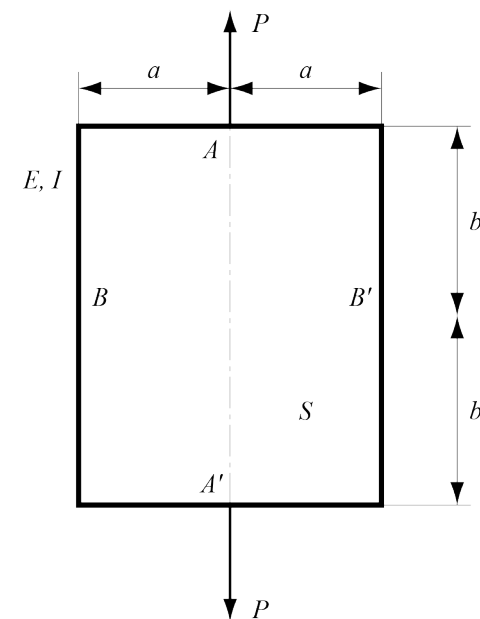
Problème 11.3

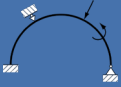




Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.3





Chapitre 11 : Systèmes hyperstatiques

Problème 11.3

